***Programme d’algèbre 4***

*1. Dual d’un espace vectoriel.*

*2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques*

*3. Bases orthogonales.*

*4 . Espaces euclidien et le procédé de Schmitt.*

*5. Réduction des formes quadratiques.*

**1. DUAL D’UN ESPACE VECTORIEL 1**

**1.1. Formes linéaires**

Dans toute la suite désigne un corps commutatif. Les deux lois internes, l’addition et la multiplication qui définissent la structure de corps, confèrent à  la structure de dont le zéro est celui du corps .

**Définition1 :**  *On appelle forme linéaire sur un   toute application linéaire de  vers .*

L’ensemble des formes linéaires sur un   se note  ( lire E étoile )

**Exemple 1 :** Soit une application définie de  vers comme suit



Alors est une forme linéaire sur , c’est-à-dire .

En effet soient , et , on a alors

= 



**Exemple 2 :** On considère l’application  définie de  vers comme suit



Alors est une forme linéaire sur , c’est-à-dire .

En effet soient , et , on a alors

=  



**1.2. Dual d’un espace vectoriel**

Soit  un, nous définissons sur l’ensemble des formes linéaires  une loi interne, notée +, et une loi externe à opérateurs dans comme suit :

(1) , ,  tel que 

(2) ,  tel que 

2

Ces deux lois confèrent à la structure de , dont le zéro est l’application nulle de vers notée , on a donc 

**Définition 2 :** Soit**un *. Le s’appelle espace dual de *

**Théorème :** Soit*un de dimension finie muni d’une base , pour tout on définit la forme linéaire sur  comme suit  où  (). On a alors est une base de *

**Démonstration :**

(1) engendre  ?

Soit tel que ,…,, on a alors +… + , en effet pour tout on a + … + + … +… + = = . D’où +… +  et  engendre 

(2)  est libre ?

Soient , … etdans tels que +… + =  .

On a alors pour tout , + … + , donc en particulier pour tout ,+ … +  ou encore +…+… += 0

Or +…+… += =  D’où  et est libre .

**Corollaire *: Soit*** * un de dimension finie on a alors *

**Définition 3:**

*La base  de s’appelle base duale de *

**Exemple 1 :**

On considère le **muni de sa base canonique  . Déterminer la base duale  de 

**Solution :** Il s’agit de définir chacune des deux formes linéaires et  :

Soit  3

. Or  et , donc



. Or  et , donc



**Exemple 2 :**

On considère le **muni de la base  où ** et **. Déterminer la base duale  de 

**Solution :**

Soit 

En premier lieu , écrivons le vecteur dans la base , c’est-à-dire calculons et tels que 

La matrice de passage de la base canonique à la base  est  et son inverse est  ( à calculer), on a donc , d’où  et . Par conséquent on a donc, comme et donc 

, or  et donc 

**-------------------------------------------------------------------------------------------------**

**Algèbre 4**

**Série N° 1**

**Exercice 1** : Soit  un  de dimension trois muni d’une base On considère les trois formes linéaires  ,  et  définies sur  comme suit :  ,  et 

Montrer que  est une base de l’espace  des formes linéaires définies sur .

**Exercice 2** : On considère le   muni de sa base canonique .

1/ Calculer  ,  et  pour tout  de .

2/ Soit  une forme linéaire,  , définie sur  comme suit :



Déterminer les coordonnées de  dans la base  de 

3/ Vérifier que  est une base de  où ,  et 

4/ Calculer  ,  et  pour tout  de .

5/ Calculer les coordonnées de  dans la base 